EL PRINCIPI DE LES CASELLES

Josep Pla i Carrera

El principi de Dirichlet

La idea del principi és molt senzilla: si hem de col·locar tres coloms en dues caselles, necessàriament dos coloms han de compartir una mateixa casella.

El principi de les caselles (o del colomar) [PC]

Enunciat 1:

Siguin k i n dos enters positius. Si almenys $kn + 1$ objectes es distribueixen entre n compartiments, aleshores almenys un dels compartiments contindrà $k + 1$ objectes.

Enunciat 2:

Si N objectes s'han de distribuir entres k cel·les o caselles, aleshores una almenys de les cel·les conté un nombre d'objectes que és més gran o igual que $\left[\dfrac{N}{k}\right] + 1$, en el cas que k no divideixi N. Si k divideix N, el nombre d'objectes és més gran o igual que $\dfrac{N}{k}$.
En particular, si $n + 1$ objectes es reparteixen entre n cel·les o caselles, aleshores una almenys conté dos objectes.

Aquest principi es coneix també amb el nom de *principi de Dirichlet* [DIRICHLET, P. G. LEJEUNE [1805–1859]]. En anglès es parla habitualment del *drawer principle* o, molt més sovint, del *pigeon-hole principle*, on el mot "pigeon-hole" equival a una casella d'un moble subdividit en cel·les per tal de col·locar-hi cartes, documents o altres objectes, i classificar-los (en castellà, "casillero"). Però l'ús reiterat porta a parlar de "pigeons i de "holes" separadament, fent-los servir com a primer exemple del principi. Tot això condueix a la denominació pintoresca de "colomar".

Exemples

1. *Quantes persones cal reunir per tal d'assegurar que n'hi ha dues que tenen nom amb la mateixa inicial?*

El conjunt de "caselles" és el conjunt de lletres de l'alfabet, suposem que són 26. Si tenim 27 persones i les "col·loquem" a les caselles, n'hi ha dues a la mateixa, i per tant tenen el nom amb la mateixa inicial. Si només hi hagués 26 persones, podria donar-se el cas que totes tinguessin inicials diferents.

2. *Quantes persones cal reunir per tal d'assegurar que n'hi ha sis que tenen nom amb la mateixa inicial?*

El conjunt de "caselles" és com abans el conjunt de les 26 lletres de l'alfabet. Si tenim $26 \times 5 + 1 = 131$ persones podem assegurar que al menys 6 d'elles tenen la mateixa inicial. Amb només 130 persones això no es podria assegurar, ja que podria haver-n'hi 5 de cada lletra.

3. *En una classe hi ha estudiants dels dos sexes, de tres pobles i que practiquen cinc esports. Quants n'hem de reunir per tal d'assegurar que n'hi ha dos del mateix sexe, del mateix poble i que practiquen el mateix esport?*

Assignem a cada estudiant una terna xyz on x pot ser H home o D dona, y pot ser P_1, P_2, P_3, segons el poble d'origen, i z pot ser E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, segons l'esport practicat. El conjunt de *totes les ternes possibles* té $2 \times 3 \times 5 = 30$ elements. Si tenim 31 estudiants, és segur que n'hi ha 2 als quals els correspon la mateixa terna, és a dir, són del mateix sexe, del mateix poble i practiquen el mateix esport. Si només tinguéssim 30 estudiants, *podria donar-se el cas* que tots tinguessin ternes diferents, i dos a dos tindrien sempre algun atribut diferent.

Observació: Malgrat la seva aparença trivial, el principi de les caselles és un instrument molt potent per a demostrar, sota condicions que només afecten el nombre d'elements, l'*existència* de certs elements d'un conjunt que comparteixen les mateixes propietats.

Problemes

PC1.–Proveu el principi del colomar.

PC2.–Demostreu que entre els individus d'un grup de set persones, almenys n'hi ha quatre del mateix sexe.

PC3.–Entre els individus d'un grup de 2 o més persones, sempre n'hi ha dues amb el mateix nombre d'amics dins del grup . (Suposem que tot individu és sempre amic d'ell mateix i que l'amistat és una relació simètrica.)

PC4.–Entre els individus d'un grup de 3000 persones, sempre n'hi ha 9 que tenen el mateix dia d'aniversari.

PC5.–Proveu que en tota elecció de 10 punts elegits en un quadrat de 3 unitats de costat, sempre hi ha 2 punts que disten com a màxim $\sqrt{2}$.

Nota. En aquest problema hom pot veure la importància en l'elecció de les cel·les. Si, per exemple, haguéssim elegit rectangles $\frac{1}{3} \times 3$, no hauríem pogut concloure allò que se'ns demanava.

PC6.–Deu jugadors formen part d'un campionat d'escacs de tots contra tots; és a dir, cada jugador ha de jugar un joc amb cada un dels altres. Un jugador s'anota $+1$, quan guanya, 0, quan fa taules, i -1, quan perd. Quan el torneig s'acaba resulta que el 70 % dels jocs han estat taules. Proveu que hi ha dos jugadors amb el mateix nombres de punts.

PC7.–*Olimpíada d'Israel, 1988.* Un grup de persones visita una exposició de 100 quadres. Cap no arriba a veure tots els quadres, però tots els quadres han estat vistos per algun dels visistants. Proveu que hi ha una parella de visitants (v_1, v_2) i una parella de quadres (α, β) tals que v_1 ha vist α però no ha vist β i v_2 ha vist β però no ha vist α.

PC8.–*Putnam Competitions, 1953.* Distribuïm sis punts a l'espai sense que n'hi hagi tres d'alineats ni tampoc quatre de coplanaris. Ara tracem segments, en total quinze, que els uneixin dos a dos. Alguns els pintem de color blau i els altres de color vermell. Proveu que hi ha almenys un triangle que té tots els costats del mateix color.

Nota. Amb cinc vèrtexs no és possible de garantir un triangle del mateix color. Busqueu un contraexemple.

PC9.–[*American Mathematical Monthly*, **65** (1958), 446, i resolt a **66** (1959), 141–142.] En una reunió de sis persones sempre n'hi ha tres que es coneixen mútuament o que es desconeixen totalment. Demostreu-ho.

PC10.–*Olimpíada Matemàtica Internacional, 1964/4.* Disset persones s'escriuen entre elles, cada una amb totes les altres. En les cartes només tracten tres temes. Cada parella de corresponsals, però, només tracta un dels temes. Proveu que almenys n'hi ha tres que escriuen sobre el mateix tema.

PC11.–Donat un conjunt de 10 enters positius diferents i menors que 107, demostreu que hi ha dos subconjunts disjunts que tenen la mateixa suma.

PC12.–Les persones d'una reunió han fet encaixades de mans en arribar. Suposem que ningú es dóna la mà a ell mateix i cap parella de persones s'ha donat la mà més d'una vegada. Demostreu que hi ha dues persones a la reunió que han encaixat el mateix nombre de mans.

PC13.–En un disc de radi 1 hi posem 8 punts (a l'interior o sobre la circumferència). Demostreu que n'hi ha dos que estan a distància estrictament inferior a la unitat.

PC14.–Donat un conjunt de n enters positius qualssevol, hi ha un subconjunt tal que la suma dels seus elements és divisible per n. Demostreu-ho.

PC15.–*P. Erdös.* Demostreu que donada una successió de més de $(r-1)(s-1)$ nombres diferents, hi ha una subsuccessió creixent de r termes, o hi ha una subsuccessió decreixent de s termes.

PC16.–Suposem que el nombre màxim de llibres que pot tenir una persona és 50000. Demostreu que a Barcelona hi ha dues persones que tenen el mateix nombre de llibres.

PC17.–El nombre màxim de cabells per mm^2 és 5. Demostreu que a Espanya hi ha dues persones amb el mateix nombre de cabells.

PC18.–Proveu que en tot conjunt de $n+1$ enters, n'hi ha dos que difereixen en un múltiple de n.

PC19.–Cada dia posem a una guardiola una moneda de 1 pta o una moneda de 2 pta i el total que tenim al cap de n dies és de m pta. Demostreu que per cada enter $0 \leq k \leq 2n-m$ hi ha un conjunt de dies consecutius durant els quals el contingut de la guardiola s'ha incrementat en k pta.

PC20.–Proveu que d'entre 5 punts d'un triangle equilàter de costat unitat, n'hi ha sempre dos que disten com a màxim $1/2$.

PC21.–Donat un conjunt C de $n+1$ punts diferents ($n \in \mathbb{N}$) sobre la circumferència d'un cercle de radi unitat, proveu que hi ha dos punts $a, b \in C, a \neq b$, tals que la distància entre ells no excedeix mai $2 \sin \dfrac{\pi}{n}$.

PC22.–*Competició matemàtica de Beijing, 1963.* Donat un conjunt S de 9 punts d'un quadrat de costat 1, proveu que sempre hi ha tres punts de S tals que l'àrea del triangle format per ells és més petita o igual que $1/8$.

PC23.–Donats n nombres enters, aleshores o bé un d'ells és múltiple de n, o bé se'n poden sumar diversos per tal d'obtenir un múltiple de n. Proveu-ho.

PC24.–*Paul Erdös. A.M.M., 1937.* Donats $n+1$ enters $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, cada un d'ells més petit o igual que $2n$, demostreu que almenys un d'ells és divisible per algun altre del conjunt.

PC25.–Proveu que en tot conjunt de 5 nombres, hi ha sempre tres nombres la suma dels quals és divisible per 3.

PC26.–Sigui A un conjunt de $n+1$ elements, on $n \in \mathbb{N}$. Proveu que existeixen $a, b \in A$ tals que $n|(b-a)$.

PC27.–Sigui $A \subseteq \{1,2,3,\dots,2n-1,2n\}$ tal que $|A| = n+1$. Demostreu que aleshores conté dos nombres que són primers entre ells.

PC28.–Sigui $C = \{r_1, \dots, r_{n+1}\}$ un conjunt format per $n+1$ nombres reals tal que $0 \le r_i < 1$. Proveu que hi ha almenys dos elements $r_i, r_j \in C$ tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

PC29.–Sigui $n \ge 3$ un nombre senar. Proveu que hi ha un nombre divisible per n en el conjunt

$$\{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}.$$

PC30.–Sigui A un conjunt de 20 nombres enters diferents de la progressió aritmètica $1, 4, 7, \dots, 100$. Demostreu que el conjunt A conté dos enters diferents la suma dels quals és 104.

Mostra de solucions

Solució del problema PC3

El nombre d'amics t_k de l'individu k del grup pot prendre valors en un dels dos conjunts $\{1,2,\dots,n-1\}$ o $\{2,\dots,n\}$, ja que 1 i n no hi poden ser simultàniament (si un individu només és amic d'ell mateix, per la simetria, no pot haver-hi una altre individu que sigui amic de tots). En qualsevol dels dos casos prenem com a caselles els elements d'un dels conjunts anteriors i hi ha com a màxim $n-1$ caselles. Per tant almenys dues persones, i, j han de tenir el t_i i el t_j a la mateixa casella, d'on $t_i = t_j$, i tenen el mateix nombre d'amics.

Solució del problema PC11

Els possibles valors de les sumes dels conjunts de 0 a 10 elements van de 0 fins a $97 + 98 + \dots + 106 = 1015$. Sigui ara A un conjunt de 10 elements enters positius i menors que 107. El conjunt A té $2^{10} = 1024$ parts. Posant les sumes de totes les possibles parts a les caselles dels possibles valors, que són 1016, resulta que per força hi ha dues parts que tenen la mateixa suma, diguem A_1 i A_2. Si aquests dos subconjunts són disjunts, ja hem acabat. Si no ho són, podem treure de tots dos $A_1 \cap A_2$ i obtindrem dues altres parts de A disjuntes i de la mateixa suma.

Solució del problema PC17

Transcripció literal del llibre de P. PUIG ADAM, *Curso de GEOMETRIA METRICA*, Tomo I – Fundamentos, Introducción (Experiencia, intuición y lógica en la génesis de la Ciencia):

"Numerosísimos son los ejemplos y curiosidades que muestran la insufuciencia o los engaños de la intuición. Por su brevedad y elementalidad nos contentaremos con los dos siguientes:

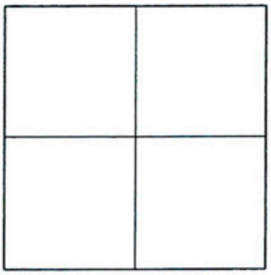
1.– Supongamos que un interlocutor de mediana cultura, que sepa que España tiene más de 20 millones de habitantes y que nuestro cuero cabelludo tiene bastantes menos de 5 cabellos por mm^2; y preguntémosle si es seguro que existen dos españoles con el mismo número de cabellos.

La imposibilidad de imaginar la experiencia comparativa le hará sin duda declarar al pronto que la pregunta no tiene contestación posible.

Sin embargo, un sencillísimo razonamiento permite llegar donde la intuición no llega, y contestar afirmativamente; pues si todos los españoles tuviesen distinto número de cabellos, habría alguno con más de 20 millones de cabellos, para lo cual necesitaría una superficie de cabeza mayor de 4 metros cuadrados."

2.– . . . "

Solució del problema PC22



Dividim el quadrat en quatre parts, tal com indica la figura. Cada part té àrea 1/4. Si tenim 9 punts al quadrat, com que hi ha 4 caselles, pel principi de Dirichlet, segur que hi ha 3 punts en una casella, és a dir, en un mateix quadrat petit. Aquests 3 punts formen un triangle dins d'un quadrat d'àrea 1/4, i per tant l'àrea d'aquest triangle ha de ser menor o igual que 1/8, ja que el triangle d'àrea màxima dins d'un quadrat és el format per dos costats i la diagonal i té àrea la meitat de la del quadrat.

PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. És l'*espai mostral*.

Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.

Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ *del succés* A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_r}.$$

Un fenòmen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

Problemes

PR1.–Proveu que (a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

(b′) En general, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(d′) Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc. m successos.

(e) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, on $\overline{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A.

(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2.–Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S. És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:

(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

(c) $P(S) = 1$.

Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b′), (d), (d′), (e) i (f) del problema anterior.

Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d'S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.

Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea d'}(A)}{\text{àrea d'}(S)} \qquad \text{o} \qquad P(A) = \frac{\text{volum d'}(A)}{\text{volum d'}(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.

Considerem ara els següents successos

$$A = \{\text{el primer article és defctuós}\}$$
$$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depén del que hagi passat amb el succés A, ja que el comportament de la mostra varia segons que s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.

En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A.)

Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2 \rangle$, on x_i designa el resultat de l'i-èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10\} \qquad \text{i} \qquad B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6 \rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podíem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.
En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$
$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals

Sigui A un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \qquad \text{i} \qquad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) =$$
$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)$$

Fórmula de Bayes

Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot PB_i}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les *causes*, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i, ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A.